

圧縮センシングを用いた トモグラフィ画像再構成

Tomographic Image Reconstruction Using Compressed Sensing

工藤 博幸^{a, b}, 董 建^c, 加茂 勝己^d,
堀井 則孝^d, 古河 弘光^d, 波多 聡^e,
村山 光宏^f, 佐藤 和久^g, 宮崎 伸介^h

Hiroyuki Kudo, Dong Jian, Katsumi Kamo, Noritaka Horii,
Hiromitsu Furukawa, Satoshi Hata, Mitsuhiro Murayama,
Kazuhisa Sato and Shinsuke Miyazaki

^a筑波大学システム情報系情報工学科

^bJST-ERATO, 百生量子ビーム位相イメージングプロジェクト

^c筑波大学システム情報系

^d(株) システムインフロンティア

^e九州大学大学院総合理工学研究院

^fバージニア工科大学材料工学科

^g大阪大学超高压電子顕微鏡センター

^h(株) メルビル

要 旨 医療用 CT や電子線トモグラフィの分野において、少数方向の投影データ・角度欠損がある投影データ・SN 比が低い投影データから高画質の画像を再構成する手法として注目されている圧縮センシング (CS) を用いた画像再構成法に関して、数学的原理を中心として平易に解説する。また、最近筆者らが開発した電子線トモグラフィ用途の CS を用いた画像再構成アルゴリズム ISER (Iterative SEries Reduction) を紹介する。

キーワード：コンピュータトモグラフィ (CT), 電子線トモグラフィ, 画像再構成, 圧縮センシング, トータルバリエーション

1. はじめに

筆者は、CT (コンピュータ・トモグラフィ) において測定した投影データから断層像を生成する画像再構成法を専門とする研究者である。CT 技術における長年の未解決問題として、1) 投影方向数が制限された少数方向投影データからの画像再構成、2) 角度欠損がある不完全投影データからの画像再構成、3) 線量を落として (または露光時間を短くして) 測定した SN 比が低い投影データからの画像再構成、

が挙げられる。これらの問題が解決されれば、医療用 CT では低被曝化・測定時間短縮・高画質化、また電子線トモグラフィでは測定時間短縮・試料損傷低減などの様々な長所が生まれる。そこで、歴史的にこれらの問題を解決するために膨大な数の研究が行われたが、2000 年代中盤までは解決が困難であると考えられてきた^{1,2)}。

これに対して、2006 年に Donoho や Candes らにより圧縮センシング (Compressed Sensing, CS) と呼ばれる不足した測定データや SN 比が低い測定データから高精度または厳密な信号 (画像) 復元を行う逆問題の新解法が考案され、上述の問題が解決できる見通しが出てきた^{3,4)}。医療用 CT の分野では、Donoho や Candes らの論文が発表されてから直ちに膨大な数の CS 画像再構成に関する研究が行われ、例えば X 線量を落として低被曝で撮影を行う低線量 CT の画像再構成法として実用化されるに至った。また、電子線トモグラフィの分野では 2010 年以降 Midgley らや Murayama らがいち早く CS の適用を提唱する論文を発表して、その後研究のアクティビティやユーザの期待は急速に増大している⁵⁻⁸⁾。特に、材料系電子顕微鏡分野を牽引する Midgley らは、画像再構成法の研究を SIRT 法から開始して、DART (Discrete Algebraic Reconstruction Technique) 法⁹⁾、そしてその後 CS に行き着いた研究歴をもち、成功を収めている^{5,6)}。更に、CS の数学的理論に関しても体系化や性能向上が進み、幾つかの書籍も出版されている¹⁰⁻¹²⁾。

本論文では、CS に馴染みのない電子線トモグラフィ分野の読者を対象として、CS の数学的原理を中心に平易に解説し、更に筆者らが電子線トモグラフィへの応用を目的として開発した CS 画像再構成アルゴリズム ISER (Iterative SEries Reduction) を紹介する。

2. 圧縮センシング (Compressed Sensing, CS) の数理

2.1 CS の原理

まず、CS を適用する典型的な例である少数方向や角度欠損がある投影データからの CT 画像再構成を想定して、CS の原理を述べる。画像の画素値を一行に並べた J 次元ベクトルを \mathbf{x} 、測定した投影データ (電子線トモグラフィの場合は連続傾斜像データ) を一行に並べた I 次元ベクトルを \mathbf{y} 、 \mathbf{x} と \mathbf{y} を関係づける $I \times J$ システム行列を $A = \{a_{ij}\}$ で表す^{注1)}。このとき、画像再構成は線形方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ を解き \mathbf{y} から \mathbf{x} を求める逆問題であるが、少数方向や角度欠損がある投影データしか測定できない場合には $I \ll J$ となり、 $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ の解は無数に存在するため再構成画像 \mathbf{x} は一意に定まらない。このような状況において高品質な (または厳密な) 画像の復元を可能にする逆問題解法が CS である。もちろん、投影データ \mathbf{y} の情報だけでは $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ の解は一意に定まらず、画像 \mathbf{x} に関する何らかの先験情報が必要となる。先験情報を用いて逆問題の解を一意に定まるようにすることを正則化 (regularization) と呼び、CS では対象画像が『疎 (スパース, sparse)』である性質を正則化に利用する。例として、楽器音の連続波

^a 〒305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1

E-mail: kudo@cs.tsukuba.ac.jp

2015 年 12 月 14 日受付

形を測定標本値の集合から再生する問題を考える。正しく波形を再生するには、通常シャノン標本化定理に基づき細かく標本化したデータが必要である。しかし、図 1 (a) に示すように、楽器音は通常フーリエ変換した空間で少ない個数の周波数の正弦波の和で表現される性質を利用することで、未知パラメータの個数を大幅に削減して粗く標本化したデータからでも正しい再生が可能になる。この例から分かるように、疎であるとは、 \mathbf{x} にスパースファイ (sparsify) 変換と呼ばれる線形変換 W を施したベクトル $W\mathbf{x}$ の多くの成分が零または零に近い無視できるほど小さい値をとる性質である。無視できる成分を零とみなせば $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ における未知数の数を J から少数 (上手くいけば I 以下) に削減することができ、 $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ の解を一意に定める (または一意に定まりやすくする) が可能になる。具体的なスパースファイ変換 W としては、望遠鏡で撮影した天体の画像は背景が真っ暗で非零の画素数が少ないので恒等変換、楽器音は少数個の周波数の正弦波の重ね合わせで表現できるのでフーリエ変換、自然画像の場合はエッジ部を除いた同一領域内ではほぼ様な濃度値をもつのでエッジ検出を行う濃度勾配変換やウェーブレット変換など、扱う信号 (画像) の種類により様々なものが考えられる。以降では、スパースファイ変換を $K \times J$ の行列 W (通常は $K \geq J$) で表し次のように表現する。

$$\mathbf{t} = W\mathbf{x} \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_K)^T$ は変換係数を一列に並べた K 次元ベクトルである (T は転置を表す)。CS では、スパースファイ変換 W の選択が性能に大きな影響を与える。疎なベクトルに変換する効果が大きければ、未知数の数をより少数に削減でき CS の性能は向上する。具体的な W のイメージをつかんでもらい以降の説明を容易にするため、図 1 (b) に後述するトータルバリエーション正則化で用いられる画像の濃度

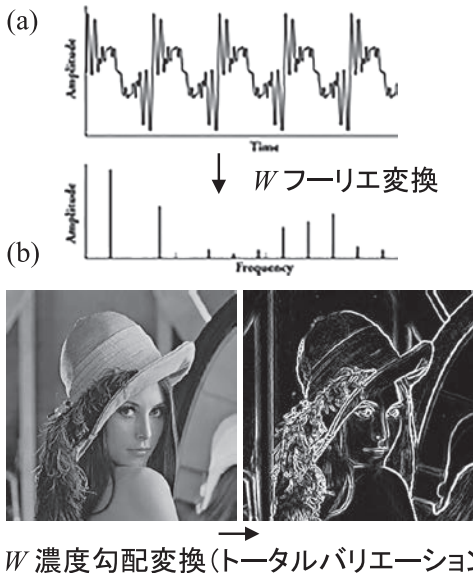


図 1 楽器音信号と画像に対するスパースファイ変換 W の例。

勾配変換に対応する W の例を示す。

次に、具体的な画像再構成の手法について述べる。CS では、
a) $W\mathbf{x}$ のどの成分が零に近く無視できるかを同定すること、
b) $W\mathbf{x}$ の零成分を無視して \mathbf{x} を復元すること、の 2 つを行う必要がある。a) と b) を同時に単一の数学的枠組みで実現するため、ベクトル \mathbf{x} の L_1 ノルムが疎な性質を上手く評価できることに注目した、以下に述べる巧妙な解法が用いられる。ここで、パラメータ $p \geq 0$ に対して、 L_p ノルムとは次式で定義されるベクトルの大きさやベクトル間の距離を評価する量である (p をノルムの次数と呼ぶ)。

$$\|\mathbf{t}\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^K |t_k|^p \right)^{1/p} & (p > 0 \text{ のとき}) \\ \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\sum_{k=1}^K |t_k|^\epsilon \right)^{1/\epsilon} & (p = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (2)$$

CS の解法としては、『合成 (Synthesis) 型』と呼ばれる手法と『分析 (Analysis) 型』と呼ばれる手法の 2 種類が存在することが知られている¹³⁾。どちらを利用するかは応用分野により趣向が分かれるが、CT 画像再構成では後述するトータルバリエーションに代表される分析型がよく用いられるため、以降では分析型の解法について述べる。分析型の解法では、画像 \mathbf{x} を未知数とする以下の最適化問題を解くことにより、画像再構成を行う。

[測定データ \mathbf{y} に雑音がない場合]

$$\text{minimize } (\|W\mathbf{x}\|_p)^p \quad \text{subject to } A\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (3)$$

[測定データ \mathbf{y} に雑音がある場合]

$$\text{minimize } \beta (\|W\mathbf{x}\|_p)^p + (\|A\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2)^2 \quad (4)$$

ただし、式 (3)、(4) におけるノルムの次数 p の選択に関しては、以下に述べる理由により CS では $p = 1$ が好んで用いられる。ベクトル \mathbf{t} の次元が 2 の場合 ($\mathbf{t} = (t_1, t_2)^T$) における $p = 0, 1, 2$ に対応する L_0, L_1, L_2 ノルムの等値線を図 2 に示す。この図から分かるように、 L_0, L_1 ノルムは L_2 ノルムと比較して座標軸から離れた疎でないベクトルを過度に大きく評価する性質をもつ。よって、 L_0, L_1 ノルムを用いることで、座標軸に近い疎な解を上手く抽出することができる。また、本来ベクトルの非零成分の個数を表すのは L_0 ノルムであり、これを用いたが非凸関数で厳密な最小化が困難であり、ほとんど全ての CS では L_0 ノルムを近似する凸関数の L_1 ノルムが用いられる^{註 2)}。式 (3)、(4) の定式化は、 $W\mathbf{x}$ が疎になるように罰金 (ペナルティ) を課して $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ を解くことに相当する。

また、式 (4) において $\beta > 0$ は正則化の強さ (疎な度合い) を調節するハイパーパラメータであり、 β が大きいとアーティファクトや雑音の低減効果は大きくなるが画像中の小さな構造物が消滅しやすくなり、逆に β が小さいとアーティ

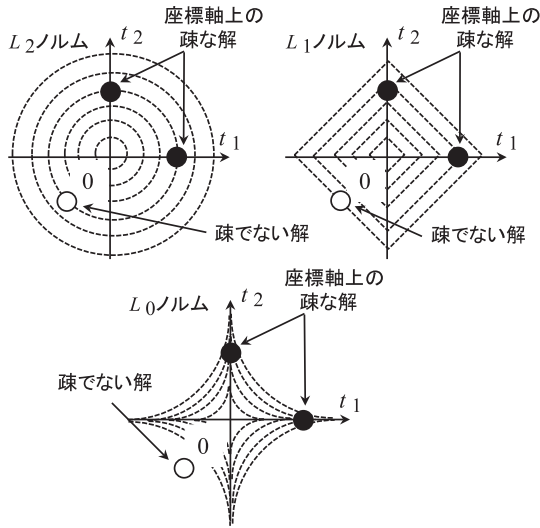


図2 スーパーシフ変換を行った係数ベクトル \mathbf{t} の次元が2の場合 ($\mathbf{t} = (t_1, t_2)^T$) における L_0, L_1, L_2 ノルムの等値線。座標軸から離れた疎でない点は、 L_1, L_0 ノルムでは原点からの実際の長さよりも等値線が中に入り込んでいるため値が格段に大きく評価され、解として選ばれにくくなる。

ファクトや雑音の低減効果が小さくなる。最適な β を自動決定する研究も存在するが、ほとんど全ての場合においてユーザが経験的に β を決定しているのが現状である。筆者らは、投影データ \mathbf{y} の値が $[0.0, 1.0]$ の範囲に入るようにスケールリングした後に画像再構成を行っているが、典型的な β の値として $0.001 \sim 10.0$ の範囲で上手く動作する。

次に、式 (3), (4) の解を求める反復法について述べる。 $p = 1, K = J$ で W が直交行列の場合に限って、反復ソフトしきい値処理 (Iterative Soft-Thresholding) 法と呼ばれる単純な構造の反復法を用いて、厳密な解を求めることができる^{2,10~12)}。一方、 $p = 1, K > J$ のより一般の場合に解を厳密に求めるには、一般化反復ソフトしきい値処理法や Chambolle-Pock アルゴリズムなど数学的に高度な最新の反復法が必要となる^{14,15)}。

CSの理論的側面興味深い問題は、測定データ \mathbf{y} に雑音が含まれない単にデータ数が少ない状況において、不足した測定データから数学的に厳密な画像復元が本当に可能かということである。Donoho や Candes らは CS の最初の論文において、システム行列 A が RIP (Restricted Isometry Property) と呼ばれる条件を満足すれば、 L_1 ノルムを用いた CS により数学的に厳密な画像復元が可能であることを証明した^{3,4)}。RIP 条件については、興味がある読者は原著論文を参照されたい。

2.2 トータルバリエーション正則化

CS の中にも多数の異なる手法が存在するが、CT 画像再構成では『トータルバリエーション (Total Variation, TV) 正則化』と呼ばれる手法が最もよく用いられる。発見者の名前にちなんで ROF (Rudin, Osher, Fatemi) モデルとも呼ばれ、元々は雑音除去を目的に提案された手法である¹⁶⁾。TV 正則化は上述の分析型 CS の特別な場合に相当し、具体的には以

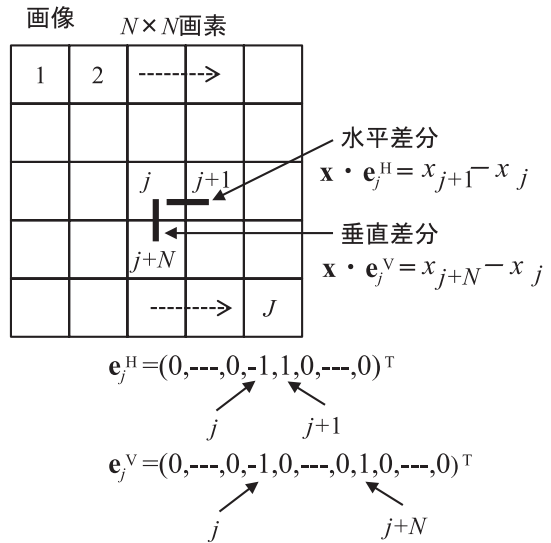


図3 TV ノルムの中で使用される水平差分と垂直差分の定義。

下のように定式化される。

まず、これまでは3次元画像を表すのが \mathbf{x} であったが、以降では説明を複雑にしないため3次元物体の一断面のトモグラフィ画像再構成を考え、2次元画像を \mathbf{x} で表す。図3に示すように、注目する画素 j の周囲で水平方向と垂直方向の差分をとる演算をベクトルの内積で表現したものを、各々 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j^H, \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j^V$ で表す ($\mathbf{e}_j^H, \mathbf{e}_j^V$ の定義は図3を参照)。このとき、画像 \mathbf{x} の TV ノルムは次式で定義される。

$$\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} = \sum_{j=1}^J \sqrt{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j^H)^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j^V)^2} \quad (5)$$

即ち、画像の各画素 j の周囲で水平差分と垂直差分の2乗和を求めルートをとったものを全ての画素 j について加算したのが TV ノルムである^{注3)}。これは、次式のように考えると、連続画像 $f(x, y)$ の濃度勾配の大きさを表す関数 $g(x, y)$ の L_1 ノルムと解釈することができ、式 (3), (4) の評価関数を拡張したものである^{注4)}。

$$g(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2}$$

$$\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} \approx \iint |g(x, y)| dx dy = L_1 \text{ norm of } g(x, y) \quad (6)$$

そして、雑音の有無の各々の場合について、画像再構成を次の最適化問題として定式化する。

$$\text{minimize } \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} \text{ subject to } \mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (7)$$

$$\text{minimize } \beta \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} + (\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2)^2 \quad (8)$$

TV 正則化は、画像の濃度変化が平らな部分のみを平滑化して、濃度勾配が大きなエッジ部を強力に保存する性質をもつ。この性質は、式 (6) において濃度勾配の大きさ $|g(x, y)|$ を

2乗した L_2 ノルムを使わずに L_1 ノルムを使って評価していることに由来する。エッジ部では $|g(x,y)|$ の値が大きくなるが、これを2乗して L_2 ノルムで評価すれば(2乗することで)過度に大きく評価されそれを最小化しているためエッジはぼやけて復元される。一方、2乗せずに L_1 ノルムで評価すれば小さ目に評価され最小化しても上手くエッジが保存される。その効果は実際の画像処理問題において驚くほど大きくCS最大の長所であり、『エッジ保存平滑化』または『 L_1 マジック』などと呼ばれる。

式(7)、(8)の解を求める反復法の構築については、多くの研究が存在する¹⁴⁻¹⁹⁾。この問題の困難さは、TVノルムは一項でもルートの中が零になるような画像 \mathbf{x} において微分不可能な関数であることに起因する^{注5)}。初期の研究では、TVノルムを次式の微分可能な関数で近似して最急降下法など微分可能最適化の手法を適用するのが主流であった。

$$\|\mathbf{x}\|_{TV} \approx \sum_{j=1}^J \left(\sqrt{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j^H)^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j^V)^2} + \varepsilon - \sqrt{\varepsilon} \right) \quad (9)$$

ただし、 $\varepsilon > 0$ は小さな定数である。しかし、この手法ではTV正則化が本来もっている上述のエッジを強力に保存する性質が働きにくい問題があり、2000年代後半以降は微分不可能最適化の手法で厳密に最小化する研究が主流に方向転換した。この周辺の研究の数は膨大であるが、高度な内容になり割愛する。

図4に、医療用胸部CT画像を模擬した数値ファントム(モデル画像)を、16方向投影データからTV正則化により再構成した画像の例を示す。CT画像再構成の標準的手法であるフィルタ補正逆投影(FBP)法とART法で再構成した画像と比較しているが、TV正則化の再構成画像はほぼ完全であり驚きの画質改善効果があることが分かる。

なお、以上のCSの説明では測定した投影データが不足している状況を想定したが、式(4)、(8)の定式化を用いれば線量を落として測定した低SN比の投影データからの画像再構成(雑音除去、デノイジング)にも有効である。

2.3 CSの問題点と限界

DonohoやCandesらによりCSの概念が提唱されてから約10年が経過して、その問題点や限界も次第に明らかになってきた。以降では、CSの主要な2つの問題点について述べる。

a) CSを過信しない

CSを用いたCT画像再構成の研究は2010年頃に過熱気味になり、たった4方向の投影データで厳密な画像再構成が可能と主張する論文まで出現した¹⁷⁾。これに対して、ART法の考案者であるHermanらは、『少数方向投影データからの画像再構成は零空間(投影データが全て零になる非零画像集合を作る空間)の特徴づけが1970年代に行われており、厳密な再構成が可能ははずがない』、という批判を行っている¹⁸⁾。即ち、システム行列 A は厳密な画像再構成のためのRIP条件を満足しない。図5に、Hermanらの主張を分かりやすく説明する簡単な例を示す。この図において、右画像の

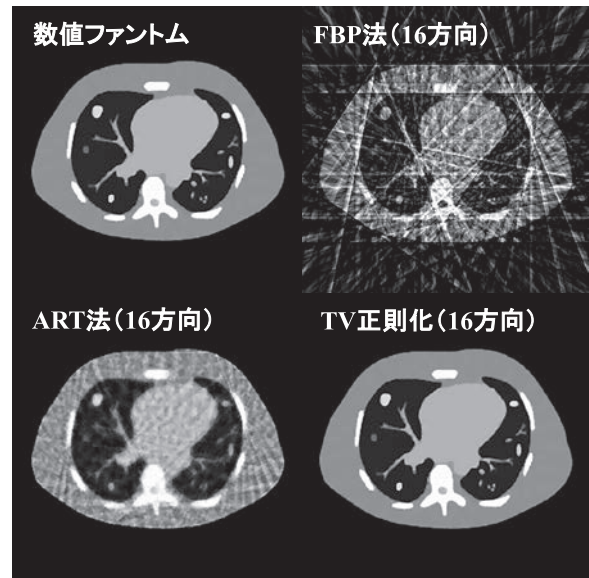


図4 胸部CT撮影を模擬した数値ファントムの16方向投影データからの再構成画像。

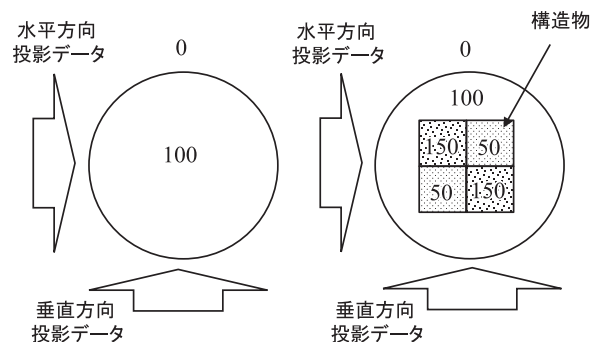


図5 2方向投影データからTV正則化で正しく再構成されない例(右画像をTV正則化で再構成するとTV値がより小さい左画像に誤って再構成される)。

水平と垂直の2方向投影データからTV正則化で画像再構成を行えば、左画像と右画像の投影データは全く同じでかつ左画像のTV値は右画像のTV値より小さいため、中央の構造物が消滅して左画像として誤って再構成される。これは簡単な例であるが、方向数が増えても同様な例はいくらでも作れる。筆者の経験でも、測定条件が悪かったり正則化を強くかけ過ぎたりした場合に、CSを適用すると小さな構造物が消滅する事例によく遭遇した。即ち、RIP条件が満足される特別な場合を除いて、CSは過信しないで用いることが大切であると言える。筆者らは、0.001, 0.005, 0.01, ..., 1.0, 5.0, 10.0の刻みで β の値を変化させ画像再構成を行い最も自然な結果を選び、その画像が十分な画質でない場合はCSの限界と判断する、という考え方をとっている。

b) 滑らかな濃度変化・テクスチャー・エッジの再現性

CS画像再構成は、エッジ部を除く同一領域内の濃度値が完全に一様である『区分的に一様(piecewise constant)』な画像モデルを仮定することに相当する。よって、対象画像に

滑らかな濃度変化やテクスチャーが存在する場合、滑らかな変化が失われ階段状のガクガクした関数として誤って復元される問題点が発生する。それに加えて、測定条件が悪い少数データや低 SN 比の場合には、エッジ座標が誤って推定されエッジ部がギザギザに復元される問題点が発生する。図6に、TV正則化によりこれらの問題点が発生した顕著な例を示す。左側の2種類の数値ファントムを低 SN 比の32方向投影データから再構成したのが右画像である。上段の例では、滑らかな濃度変化を無理に階段状関数で近似した再構成画像になっている。この問題点を解決する手法の開発は、現在におけるCSの大きなテーマになっている²⁰⁾。一方、図6の下段の例では、エッジ座標が誤って推定されエッジ部がギザギザに再構成されている。

3. アルゴリズム ISER (Iterative SEries Reduction) の紹介

最近筆者らは、ISER という名称の TV 正則化に基づく画像再構成アルゴリズムを開発した。以降では、ISER について紹介する。

まず、ISER とは、既存の TV 正則化は反復法の収束が遅く計算量が膨大になる問題点を解決して、約 100 倍の収束の高速化を図った新手法である。具体的には、以下の考え方で高速化を実現している。式 (7)、(8) の形に定式化した CT 画像再構成に用いる反復法の構造は、全ての投影データを同時に用いて画像更新を行う同時反復型 (SIRT 法はこれに属する) と投影データを部分データ (ブロック) の集合に分割してブロック毎に画像更新を行う Row-Action 型またはブロック反復型 (ART 法はこれに属する) の2種類が存在する²⁾。Row-Action 型の反復法は、投影データのアクセス順序を工夫すると高速に収束することが知られている^{2,21)}。既存

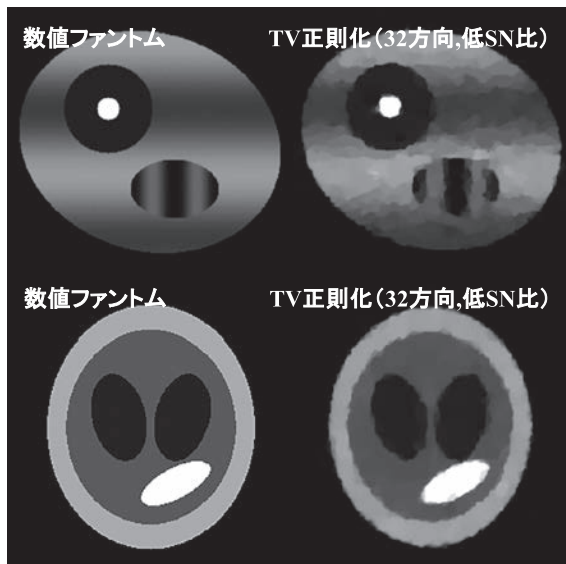


図6 CSで滑らかな濃度変化やエッジが上手く再現できない画質限界を示す例(低SN比の32方向投影データからTV正則化で再構成すると、滑らかな濃度変化は階段状に、エッジはギザギザに再構成される)。

のTV正則化を用いた画像再構成法の収束が遅い理由は、同時反復型の構造をもつためと考えられる。そこで、Row-Action型の反復法で収束を高速化してかつ厳密にTV正則化の解が求められるように改良した反復法がISER高速化の骨組みである。ISERの具体的なアルゴリズム導出は、文献を参照されたい¹⁹⁾。

図7, 8に、ISERによる電子線トモグラフィー画像再構成の例を示す。試料はXeイオン照射を施したFePt/Al₂O₃薄膜(磁性材料)で、映っている構造物はFe-Ptナノ粒子である²²⁾。TEMで測定した明視野の連続傾斜像から画像再構成を行った。図7は、角度範囲が-65~65度に制限された32方向連続傾斜像から再構成した一断面の画像を表している

Fe-Pt試料(0度の連続傾斜像)

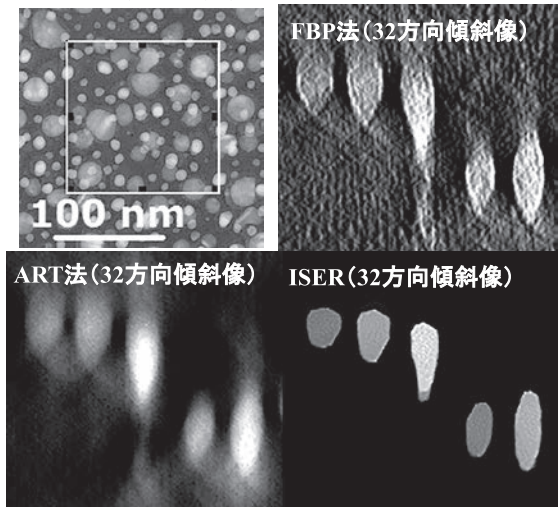


図7 Fe-Pt試料の電子線トモグラフィー実連続傾斜像(測定角度範囲-65~65度, 方向数32)から再構成した断面像の比較(構造物はナノ粒子, 傾斜像は白黒反転して表示)。

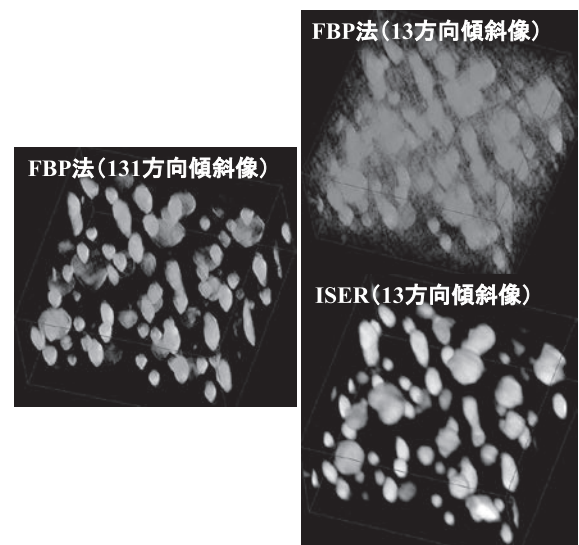


図8 Fe-Pt試料の電子線トモグラフィー実連続傾斜像(測定角度範囲-65~65度, 方向数13)から再構成した3次元画像のボリュームレンダリング画像(構造物はナノ粒子)。

(傾斜像は白黒反転して表示している). FBP法とART法の再構成画像と比較しているが, ISERでは滑らかな濃度変化やテクスチャーが失われている反面, 角度欠損による縦軸方向の形の歪み, 粒子境界のぼやけ, ストリークアーティファクトはなく粒子形状が鮮明に再構成されている. 図8は, 13方向連続傾斜像から再構成した3次元画像をボリュームレンダリングした画像を表している. FBP法で顕著に現れるストリークアーティファクトがISERでは少なく, 全データの131方向連続傾斜像から再構成した画像に近く粒子形状が再構成できている.

上述の実データの画像再構成(32方向連続傾斜像)における計算時間は, Core i7-3770 3.4 GHz CPUを搭載したデスクトップPCを用いて, FBP法が35 (min), 高速化を行わない同時反復型のTV正則化である一般化反復ソフトしきい値処理法が1,959 (hour), ISERが21.67 (hour)であった. FBP法やSIRT法と比較すると計算時間が長いものの, 図7, 8で示した絶大な画質改善効果をもつCS画像再構成を, ISERの開発によって実用可能な計算時間にまで大幅に短縮することに成功した.

4. まとめ

本論文では, 電子線トモグラフィ分野において今後研究開発や実用化が進むと予想される, CSを用いたCT画像再構成について解説した. また, 最近筆者らが開発した電子線トモグラフィ用途のCSを用いた画像再構成アルゴリズムISERを紹介した. 読者の方々の役に立てば幸いである.

謝辞

図7, 8の電子線トモグラフィ連続傾斜像は, 九州大学松村晶教授(工学研究院)から提供を受けたものであり, 深謝いたします. また, 本研究の一部は, JSPS科研費15K06103, JST先端計測「マテリアル開発系リアルタイム電子線トモグラフィシステムの開発」の助成を受けたものです.

注

注1) 電子線トモグラフィにおいて $M \times M$ 画素の L 枚の連続傾斜像から $N \times N \times N$ 画素の3次元画像を再構成する場合, ラスタ走査で $N \times N \times N$ 個の画素値を一列に並べた $J = N \times N \times N$ 次元ベクトルが \mathbf{x} , $M \times M \times L$ 個の測定値を一列に並べた $I = M \times M \times L$ 次元ベクトルが \mathbf{y} になる. 画素数 N は, 画像再構成に先立ってユーザがどの程度の空間分解能のトモグラムが必要かを考慮して決定する.

注2) L_p ノルムは $p \geq 1$ の場合には極小解が存在しない最小化が容易な関数となり, このような関数を凸関数と呼ぶ. 一方, $0 \leq p < 1$ の場合には極小解が存在する関数となり, このような関数を非凸関数と呼び厳密な最小化は大変難しくなる. 例えば, $p = 1$ で次元が2の場合, 式(3)は直線 $c_1 t_1 + c_2 t_2 = y$ 上で $|t_1| + |t_2|$ を最小化する問題, 式(4)は $\beta(|t_1| + |t_2|)$ と $(c_1 t_1 + c_2 t_2 - y)^2$ の和を最小化する問題となり, 凸関数の最小化問題である. 一般の J 次元でも同じであり, $p = 1$ を用いれば極小解に陥る心配は不要である.

注3) 3次元画像再構成の場合には, 1) 2次元断面画像のTVノル

ムを全スライスについて加算する手法, 2) スライス間の差分も考慮して式(5)を拡張した3次元画像のTVノルムを使用する手法, の2種類がある. 筆者らは簡便な1)の手法を用いている.

注4) 式(6)において $g(x, y) \geq 0$ であるため第2式の絶対値記号は不要であるが, L_1 ノルムであることを気づかせるため意図的につけた.

注5) $\|\mathbf{x}\|_{TV}$ の第 j 項は $[(x_{j+1} - x_j)^2 + (x_{j+N} - x_j)^2]^{1/2}$ であり, x_{j+1} に関する偏導関数は $(x_{j+1} - x_j) / [(x_{j+1} - x_j)^2 + (x_{j+N} - x_j)^2]^{1/2}$ となり $x_j = x_{j+1} = x_{j+N}$ の座標(つまり $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j^H = 0$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j^V = 0$ となる画像 \mathbf{x})において不連続(どの方向からその座標に近づくかで微係数が -1 と $+1$ の場合が存在)となり微分できない. 同様に計算すると, 同じ座標で x_{j+N} と x_j の偏導関数も不連続となり微分できない.

文 献

- 1) Rangayyan, R., Dhawan, A.P. and Gordon, R.: *Appl. Opt.*, **24**, 4000–4012 (1985)
- 2) 工藤博幸: 第2章『投影からの画像再構成』, 日本医用画像工学会(編), 医用画像工学ハンドブック, 日本医用画像工学会, 39–84 (2012)
- 3) Donoho, D.L.: *IEEE Trans Inf Theory*, **52**, 1289–1306 (2006)
- 4) Candes, E.J., Romberg, J. and Tao, T.: *IEEE Trans Inf Theory*, **52**, 489–509 (2006)
- 5) Leary, R., Saggi, Z., Midgley, P.A. et al.: *Ultramicroscopy*, **131**, 70–91 (2013)
- 6) Saggi, Z., Divitina, G., Winter, B. et al.: *Ultramicroscopy*, **160**, 230–238 (2016)
- 7) Venkatakrishnan, S.V., Drummy, L.F., Jackson, M.A. et al.: *IEEE Trans Image Process*, **22**, 4532–4544 (2013)
- 8) Monsegue, N., Jin, X., Echigo, T. et al.: *Microscopy and Microanalysis*, **13**, 1362–1367 (2012)
- 9) Batenburg, K.J., Bals, S., Sijbers, J. et al.: *Ultramicroscopy*, **109**, 730–740 (2009)
- 10) Elder, Y.C. and Kutyniok, G.: *Compressed sensing: theory and applications*, Cambridge University Press (2012)
- 11) Elad, M.: *Sparse and redundant representations: from theory to applications in signal and image processing*, Springer (2010)
- 12) Rish, I. and Grabarnik, G.: *Sparse modeling: theory, algorithms, and applications*, CRC Press (2014)
- 13) Elad, M., Milanfar, P. and Rubinstein, R.: *Inverse Problems*, **23**, 947–968 (2007)
- 14) Loris, I. and Verhoeven, C.: *Inverse Problems*, **27**, Article ID 125007 (2011)
- 15) Chambolle, A. and Pock, T.: *J. Math. Imaging Vis.*, **40**, 120–145 (2011)
- 16) Rudin, L.I., Osher, S. and Fatemi, E.: *Physica D*, **60**, 259–268 (1992)
- 17) Trzasko, J. and Manduca, A.: *IEEE Trans Med Imaging*, **28**, 106–121 (2009)
- 18) Herman, G.T. and Davidi, R.: *Inverse Problems*, **24**, Article ID 045011 (2008)
- 19) 山崎 深, 高木景太, 根本拓也, 他: 電子情報通信学会技術研究報告 MI2014-95 (2015)
- 20) Guo, W., Qin, J. and Yin, W.: *SIAM J Imaging Sci*, **7**, 1309–1334 (2014)
- 21) Herman, G.T. and Meyer, L.B.: *IEEE Trans Med Imaging*, **12**, 600–609 (1993)
- 22) Shirai, M., Tsumori, K., Kutsuwada, M. et al.: *Nucl. Instrument. Methods in Phys. Res. Section B*, **267**, 1787–1791 (2009)