

電子レンズの設計技術（前篇） （基礎理論から実装技術，装置応用まで）

On the Design of Electron Lenses 1

藤田 真^{a*}，小瀬 洋一^b

Shin Fujita and Yoichi Ose

^a Shimadzu (Asia Pacific) Pte Ltd.

^b (株)日立ハイテクノロジーズ

要旨 電子レンズの設計技術について2回に分けて概説する。前篇(本講座)では光学設計について解説する。電子光学では電磁ポテンシャルが通常光学の屈折率の働きを担う。電子光学設計は実効的な屈折率であるポテンシャルの空間分布をデザインすることと言えるが、そこにはLaplace場という強い制約が課せられる。そのため電子レンズでは収差の影響を抑えるために短焦点距離化という手法がとられてきた。代表的な短焦点距離化の原理について紹介する。また近軸軌道方程式から得られる光学パラメータとエミッタンス図を組み合わせた効率的な光学設計手法について述べる。後篇では低収差レンズの具体的な設計例やその実装に必要な技術についてまとめる予定である。

キーワード：電磁ポテンシャル，屈折率，光学パラメータ，エミッタンス図，焦点距離

1. イントロダクション

レンズの光学設計と言えば、通常、図1に示すような系が思い描かれるであろう。例えば「結像」モードでは物面の一点から出た光線束が像面の一点に集束することを目標とする。このとき注目されるのは一本一本の光線の軌跡というよりは、一点から出射される光線“束”が物面→像面間でどのように関係づけられるかであり、レンズ設計の目標は光線束が所望の関係を持つようコントロールすることだと言える。光線束のふるまい（レンズ特性）を焦点距離 f_i などの少数の「光学パラメータ」を使って把握していく手法をとることで、個々の光線軌道を追跡するよりも効率的に光学設計をすすめることができる。

光線束のコントロールは屈折率に適当な空間分布をもたせることで行われる。空気中とは異なる屈折率を持った材料を適当な形状に加工してレンズを製作するが、その屈折率や形状を調整して所望の結像特性を実現する。レンズの光学設計で基本となるのはSnellの法則であることはよく知られている¹⁾。図2にレンズ面での屈折の様子を示すが、レンズ界面では以下の関係式が成立する：

$$n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1 \quad (1)$$

¹⁾ 79 Science Park Drive #02-01/08, Cintech IV, Singapore Science Park 1, Singapore 118264

TEL: +65-6778-6280; FAX: +65-6778-6901

* E-mail: fujita@shimadzu.com.sg

2016年8月25日受付，2016年11月7日受理

ここで、 n_0, n_1 はそれぞれ空気中、レンズ材料の屈折率である。レンズ設計はSnellの関係式を利用して行われる。

“電子光学”においてもSnellの法則に対応する関係式があり、「屈折率」が定義できること、その結果、通常光学で用いられる手法（光学パラメータの利用）を使った効率的な光学設計が可能なこと、しかしながら電子光学屈折率の空間

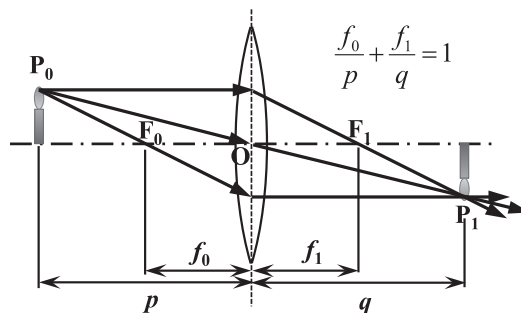


図1 レンズ光学設計の例

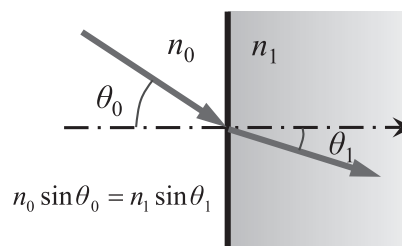


図2 Snellの法則

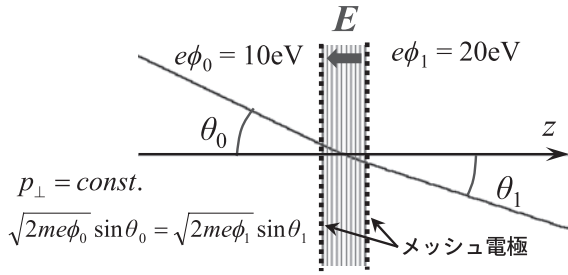


図3 電子光学での Snell の法則 (運動量と屈折率)

分布には強い制約がかかるため簡単には「収差」をキャンセルしたレンズ設計ができないことなどを本講座 (前篇) で見ていく。前篇の最後に収差を抑えたレンズ設計の基本的な考え方を紹介したあと、後篇で低収差レンズの具体的な設計例やその実装に必要な技術についてまとめる。

2. 電子光学の屈折率と Laplace ポテンシャル

電子光学では電磁ポテンシャルが「屈折率」の働きをすることを覚えていこう。いま図3のように電子が左側から右側に向かって2枚のメッシュ電極を通過する仮想的な系を考える。電子の運動エネルギーはメッシュ電極の左側で $e\phi_0 = 10 \text{ eV}$ 、右側で $e\phi_1 = 20 \text{ eV}$ となるよう電位設定されているものとする (以下、陰極のポテンシャルをポテンシャルの原点に取るものとする)。2枚のメッシュ電極間には電位差による電界, E , が生じるため電子は電極間で加速され、その軌道は電位の境界面で「屈折」を受けるように見える。

ここで屈折角度を計算してみよう。電界の方向はメッシュ電極に垂直なので運動量の電極面内成分は電極の左右で保存される:

$$p_{\perp} = \sqrt{2me\phi_0} \sin \theta_0 = \sqrt{2me\phi_1} \sin \theta_1 \quad (2)$$

ここで m は電子質量である。

式 (2) を Snell の法則 (1) と比べると、電子軌道の屈折は位置ベクトル \mathbf{r} における電子の運動量 $\sqrt{2me\phi(\mathbf{r})}$ が屈折率 $n(\mathbf{r})$ を置き換える形で起こっていることが分かる。一般に、通常光学における光線追跡の方法 (Fermat の原理) と変分原理を使って粒子軌道を求める Hamilton 力学 (Maupertuis の原理) は数学的に等価であることが知られている。Fermat の原理によれば、屈折率分布 $n(\mathbf{r})$ が与えられたとき、光線の始点 P_0 、終点 P_1 が決められると実際に光線が通る軌道は以下に定義する経路積分 (eikonal 関数) を最小にするものとして求められる²⁾:

$$S(P_0, P_1) = \int_{z_0}^{z_1} n(\mathbf{r}) \sqrt{1+x'^2+y'^2} dz \rightarrow \text{Min.} \quad (3.1)$$

ここで、ダッシュ記号「'」は z についての微分を表す。このような方法で軌道を求める手法は変分法と呼ばれ広く応用されている。一方、Hamilton 力学によれば電位ポテンシャル分布 $\phi(\mathbf{r})$ が与えられたとき、電子軌道の始点 P_0 、終点 P_1

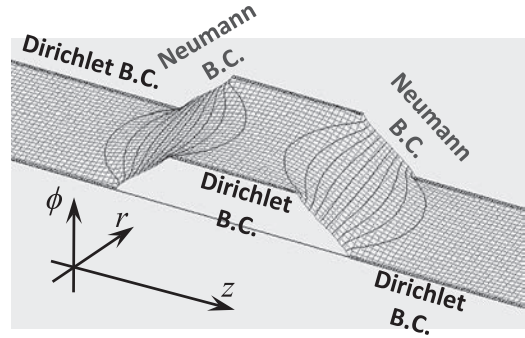


図4 静電 einzel レンズのポテンシャル分布

を決めると実際の軌道は以下に定義する経路積分 (Hamilton の特性関数) を最小とするものに対応する (磁界がある場合にはベクトルポテンシャル積分項が加わる)³⁾:

$$W(P_0, P_1) = \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{2me\phi(\mathbf{r})} \sqrt{1+x'^2+y'^2} dz \rightarrow \text{Min.} \quad (3.2)$$

上記2式から、電子軌道が運動量分布 $\sqrt{2me\phi(\mathbf{r})}$ から決定される様子が、光線軌道が屈折率分布 $n(\mathbf{r})$ から規定されるのと数学的に同等であることが分かる。運動量分布 $\sqrt{2me\phi(\mathbf{r})}$ は電子軌道にとっての「屈折率」なのである。電子光学のレンズ設計はポテンシャル分布 $\phi(\mathbf{r})$ をデザインして実効的な屈折率 $\sqrt{2me\phi(\mathbf{r})}$ を所望の形にすることと言える。

しかしながらポテンシャル分布 $\phi(\mathbf{r})$ のデザインには強い制約が課せられる。屈折率材料を任意のレンズ形状に加工できる通常光学の場合と違って任意のポテンシャル分布を実現することはできないからである。静電界についての Maxwell 方程式を解くと電位ポテンシャルは Laplace 方程式を満たす必要があることが導かれる⁴⁾:

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

閉空間 V 内での Laplace 方程式を満たすポテンシャル分布はその境界面 S でのポテンシャル値 $\phi(\mathbf{r}_s)$ (Dirichlet 境界条件)、あるいは、 $\phi(\mathbf{r}_s)$ の法線方向微分値 (Neumann 境界条件) を指定すれば一意に決まるという性質がある。境界条件を規定するとポテンシャル分布が決まってしまうのである。静電レンズ設計ではこの性質を利用して、電子が通過する空間を囲む曲面上の境界条件を定義する (電極形状と印加電圧を指定することによりポテンシャル分布を決めるという間接的な方法で実効屈折率分布を与えている。図4に軸対称 einzel レンズのポテンシャル設計例を示す。両側にある円筒電極を接地電位とし中心電極に正電圧を印加したときに得られるポテンシャルを鳥瞰図表示した。各電極表面では Dirichlet 境界条件を、ギャップでは Neumann 境界条件を課することでレンズ内ポテンシャル分布が定義される。

ポテンシャルが Laplace 方程式を満たすことを利用すると軸上ポテンシャル値 $\Phi(z)$ からその周りの分布 $\phi(r, z)$ を計算

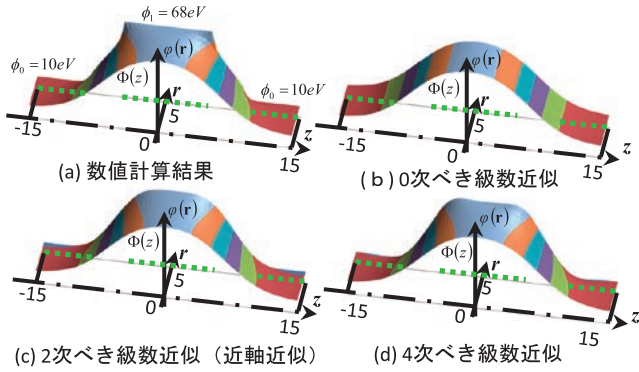


図5 Laplace ポテンシャルのべき級数展開

することが可能となる。軸対称レンズの場合には軸上ポテンシャル値とその微分を係数とした動径方向距離 r についてのべき級数展開により表現できる：

$$\phi(r, z) = \Phi(z) - \frac{\Phi''(z)}{4} r^2 + \frac{\Phi^{(4)}(z)}{64} r^4 - \frac{\Phi^{(6)}(z)}{2304} r^6 + K \quad (5)$$

Laplace ポテンシャルのべき級数展開各項の意味を einzel レンズを例に見てみよう。図5はポテンシャル $\phi(r, z)$ を鳥瞰図表示したものである。数値計算によって求めたポテンシャル分布を (a) 図に示した。これと式 (5) のべき級数展開を使って軸上ポテンシャル値 $\Phi(z)$ から全体ポテンシャル分布を近似計算した結果を比較していく。0次、2次、4次項まで展開した結果をそれぞれ、(b)、(c)、(d) 図に示す。0次ポテンシャル分布は r に依存しないためレンズ効果を持たない。2次項を入れると凸レンズ効果を持つポテンシャル分布となることがわかる。次節に述べる近軸軌道方程式はポテンシャル展開を2次項で打ち切り高次項を無視した場合に得られる近似である。2次ポテンシャル分布は完璧な結像をもたらす。4次項まで考慮すると、展開ポテンシャル分布は軸から外れた位置でも数値計算結果と近いものとなる。Laplace ポテンシャルに伴う4次項の影響により完全結像性が損なわれ取差が生じる。

3. 近軸軌道方程式

電子軌道は (3.2) 式に示した変分法 (Maupertuis の原理) を使って求めることができる。近軸近似は変分計算に用いる Lagrangian を軌道の変位、傾斜変数、 x, y, x', y' 、について Taylor 展開し最低次項 (2次) で打ち切ることに対応する。：

$$\begin{aligned} \sqrt{2me\phi(r, z)} \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} &\sim L^p(x, y, x', y'; z) \\ &= \sqrt{2me\Phi(z)} \left[1 - \frac{1}{8} \frac{\Phi''(z)}{\Phi(z)} r^2 + \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

ポテンシャルべき級数展開式 (5) の2次項までしか考慮されていない。

近軸 Lagrangian (6) 式に Euler 方程式 (経路積分式 (3.2)

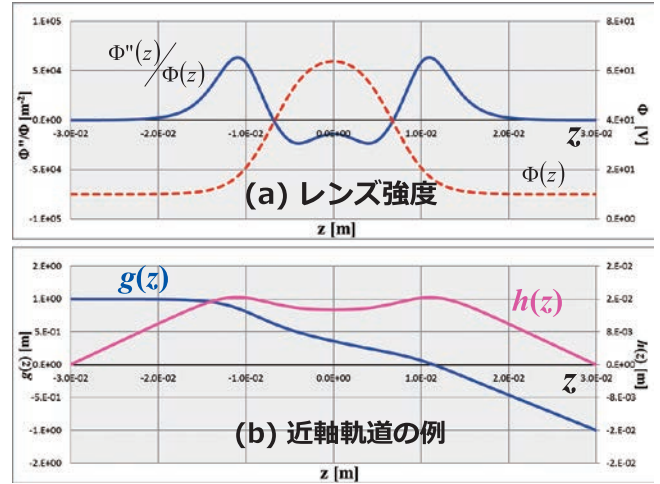


図6 einzel レンズのレンズ強度分布と近軸主軌道

の変分を0とする軌道を求める手法) を適用すると近軸軌道方程式が得られる：

$$x'' + \frac{\Phi'}{2\Phi} x' + \frac{\Phi''}{4\Phi} x = 0 \quad (7)$$

ここから、レンズ強度 (軌道傾斜を変化させる屈折力) は、左辺第3項の係数が指標となることがわかる：

$$\text{レンズ強度} \sim \frac{\Phi''(z)}{\Phi(z)} \quad (8)$$

einzel レンズにおける「レンズ強度」を図6 (a) 実線に示す。式 (8) の正負により凸/凹レンズが決まるので einzel レンズは両側に凸レンズ効果を、中心に弱い凹レンズを持った構成であることが分かる。2本の近軸主軌道 $g(z)$, $h(z)$ を入口面 (物面) から出口面 (像面) まで計算した結果を図 (b) に示す。軌道の屈曲を追うと両軌道とも「レンズ強度」の示唆する凸/凹/凸レンズ効果に沿ったふるまいを示していることがわかる。静電レンズ設計では、軸上ポテンシャル (つまり電子の運動エネルギー) が下に凸になる領域は凸レンズ作用を持ち、上に凸となる領域では凹レンズ作用を持つことが電極/電位配置の指針となる。

4. 近軸レンズ特性とエミッタンス図

近軸軌道方程式 (7) は2階の斉次型微分方程式なので2本の独立解が分かれば一般解はそれらの線形結合として表すことができる。この性質を利用するとレンズの近軸特性を少数の「光学パラメータ」で表現することが可能となる。個々の軌道を計算することなくレンズ特性を把握できるので効率的なレンズ設計に利用できる。ここでは焦点距離と主面位置を近軸光学パラメータにとりレンズ特性の評価を行ってみよう。これらのパラメータは近軸主軌道 $G_0(z)$, $G_1(z)$ から求められる。図7に示されるようにこれらの主軌道は、それぞれ、出口/入口面において変位 = 1, 傾き = 0 となるような近軸

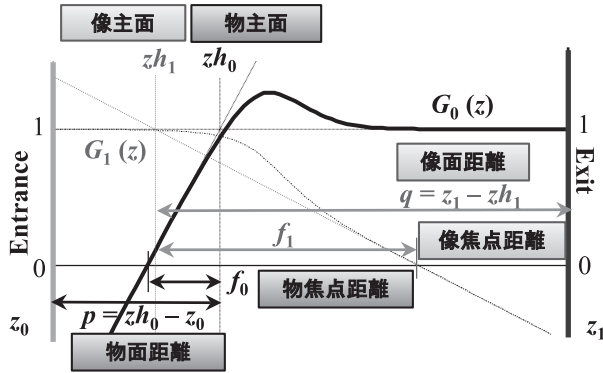


図7 近軸主軌道とレンズ光学パラメータ

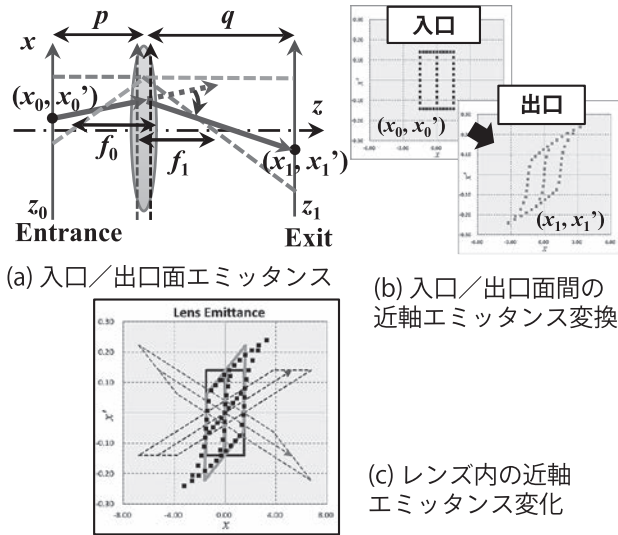


図8 近軸近似によるエミッタンス変換の様子

軌道である。入口側での $G_0(z)$ 軌道の漸近線から図に示す方法で物焦点距離 f_0 と物主面位置 z_{h0} が導出される。同様に $G_1(z)$ 軌道からは像焦点距離 f_1 と像主面位置 z_{h1} が与えられる。

レンズ特性の理解にはエミッタンス図の作成が有効である。電子軌道が入口面、出口面と交差するときの（軌道変位、傾斜）のペア (x, x') を「位相点」と呼ぶ（図8(a)参照）。これを図の横軸、縦軸にプロットする。1本の軌道が図上の一点を与えるが、特定の条件を満たす軌道群をまとめて表示することでエミッタンス図が作られる。図8(b)に einzel レンズのエミッタンス図の変換例を示す（近軸軌道ではなく実軌道から計算）。入口面でのエミッタンス (x_0, x'_0) として長方形図形を仮定し、同じ軌道群が出口面で持つ条件 (x_1, x'_1) の集合と対応させた。レンズの役割を「電子が入口面から出口面へ向けて輸送される際にその軌道条件（エミッタンス）を所望の形に変換するもの」と考えると、その効果はエミッタンス図の写像特性で与えられる。例えば einzel レンズの例が示す「結像モード」ではエミッタンス図は180度回転しながらその横幅が倍率 M 倍に拡大される。軌道傾斜の情報はエミッタンス図の縦方向ひろがりから得ることができる。

近軸軌道近似では入口／出口間のエミッタンスの写像

$(x_0, x'_0) \rightarrow (x_1, x'_1)$ を少数の光学パラメータで規定できる。一般近軸軌道が2本の近軸主軌道 $G_0(z), G_1(z)$ の線形結合の形で書けることを利用するとエミッタンスは以下の線形変換で結びつけられることが導けるからである：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f_1 - q) & pq \left(\frac{f_0}{p} + \frac{f_1}{q} - 1 \right) \\ f_1 & f_1 \left(\frac{p}{q} - 1 \right) \\ -\frac{1}{f_1} & \frac{(f_0 - p)}{f_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & f_0/f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

入口／出口面位置を、それぞれ、 $z = z_0, z = z_1$ とし、レンズ主面との距離を $p = z_{h0} - z_0, q = z_{h1} - z_1$ で定義した。4つの光学パラメータのみで近軸軌道エミッタンスの写像特性が定義できることは、（近軸）レンズ特性は4パラメータで把握できることを示している。変換を規定する \mathbf{T} (transfer) 行列を(9)式最右辺に示した行列の積の形に書くことでレンズの働きを理解できる。図8(c)に einzel レンズの光学パラメータから \mathbf{T} 行列を求めエミッタンスの変換を計算した結果を示す。入口面でのエミッタンス図（実線長方形）に \mathbf{T} 行列の各分解成分を順次かけていくと、「距離 p の直進運動」「レンズによる屈折」「距離 q の直線運動」に対応した変換を受けることで平行四辺形に回転していく様子が分かる。近軸軌道から求めた各パラメータがそれぞれの変換を規定する。総合的には、レンズが結像モードであることに対応して、エミッタンス図は入口→出口に向かって180度の回転を受ける。

近軸近似で実際軌道の入口／出口面間のエミッタンス変換をどの程度まで再現できているのかを確認するため、図8(c)に直接軌道計算から得られた出口面エミッタンス（■点）を重ね描きした。入口面での軌道条件は近軸計算のエミッタンスに合わせた。出口面の近軸エミッタンス（実線平行四辺形）との比較から変換の概略はよく近似できている一方、光軸からはずれずれた軌道の位相点は歪みをとめない近軸エミッタンスからはずれることが認められる。近軸近似で無視したポテンシャル高次項の影響を受けるためである。結像特性（集束性）を議論するような場合には収差の評価が必要となることがわかる。

5. 収差発生の原因

近軸軌道方程式の導出時に無視した Lagrangian 高次項の影響で「収差」は生じる。エミッタンス図に歪みを生じ、理想的な結像特性は損なわれる。高次項の影響は摂動特性関数を計算することで求められる⁵⁾。Lagrangian 高次項を近軸軌道 $\mathbf{r}^p(z)$ に沿って経路積分したものを摂動特性関数と呼ぶ：

$$W^1[\mathbf{r}_0 = \mathbf{x}_0 + i\mathbf{y}_0, \mathbf{r}_0' = \mathbf{x}_0' + i\mathbf{y}_0'] = \int_{z_0}^{z_1} L[\mathbf{r}^p(z; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0'), \mathbf{r}^{p'}(z; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0'); z] dz \quad (10)$$

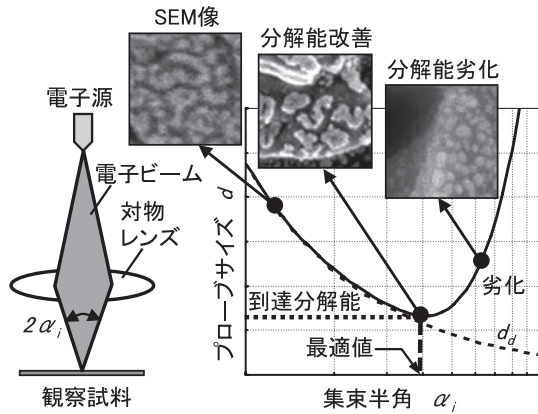


図9 集束半角 (α_i) と分解能の関係

摂動特性関数, W^l , は近軸軌道を指定して定義されるので軌道初期値, x_0, y_0, x'_0, y'_0 , の関数とみなすことができる. 摂動により入口/出口面で生じる収差, $r_0^l, p_0^l, r_1^l, p_1^l$, と摂動特性関数との間には以下の関係がある:

$$dW^l(P_0, P_1) = (p_1^l dr_1^l - r_1^l dp_1^l) - (p_0^l dr_0^l - r_0^l dp_0^l) \quad (11)$$

ここで運動量 \mathbf{p} の成分 p_x, p_y は Lagrangian から次のように定義される:

$$p_x = \frac{\partial L(x, x', y, y'; z)}{\partial x'}, \quad p_y = \frac{\partial L(x, x', y, y'; z)}{\partial y'} \quad (12)$$

式 (11) より, 収差による軌道パラメータの変化分 (エミッタンス図の歪み) は摂動特性関数の「微分係数」として与えられることが分かる. 収差は摂動特性関数の変化がはげしくなるような近軸軌道で大きい. Lagrangian 高次項の形から, レンズ電磁界中での光軸からの外れ量が大きい軌道は大きな収差を伴うものと考えてよい.

収差を抑えるには「近軸軌道がなるべく光軸からはずれないようする」というのが原則となる. 軸対称 Laplace 場で電子レンズを構成する場合, 収差の発生は避けられないがレンズの「短焦点距離化」により軌道を光軸近くに留めることで収差の絶対値を抑えることはできる. これが低収差レンズを実現するための基本指針となる.

6. 低収差レンズ実現の戦略 (短焦点化)

図9に電子レンズで形成されるプローブサイズ d と集束半角 α_i の関係を示す. SEM像が示すようにプローブサイズは分解能に対応する. 電子源の一点から出た波長 λ の電子ビームを集束すると回折直径 $d_d = 0.61\lambda/\alpha_i$ の広がりを持ち, α_i が大きくなると分解能が改善する. 分解能が最も良くなる α_i を最適集束半角といい, その後, 前章の収差のため分解能が劣化する. すなわち, 収差の発生をより大きな α_i まで移動できれば, より高い到達分解能が期待できる.

収差はレンズの光軸から外れるにしたがって大きくなる. 図10に高分解能レンズ設計の方法を示す. 焦点距離 f を固

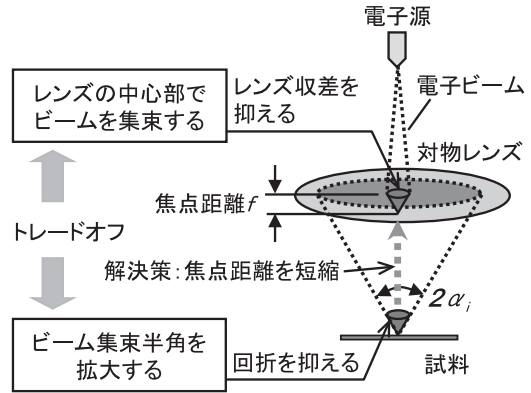


図10 焦点距離を短縮する高分解能化の方法

	①短WDにする	②磁界レンズ主面を試料に近づける	③電界レンズを利用する
レンズ構成の模式図			

WD = Working Distance: 試料と対物レンズ先端部の距離

図11 レンズ短焦点化の手段

定にすると, 「レンズの中心部でビームを集束すること」と「ビーム集束半角を拡大すること」はトレードオフの関係にある. 図から明らかなように, ビーム集束半角を維持したまま焦点距離 f を短縮することで, レンズの中心部だけを使ってビームを集束できる.

SEMの光学系におけるレンズ短焦点化の3手段を図11にまとめた. ①試料を磁界レンズに近づける. すなわち短WDのレンズ構成であるが, 磁路の存在や試料の傾斜のため困難である. 逆に②試料位置はそのままで磁界レンズ主面を試料に近づける. 磁路形状を工夫することで実現可能である. ③磁界レンズと試料の間に電界レンズを追加すると, 合成レンズの主面を試料側に移動できるので, 実効的に短焦点化できる.

図12は現行のSEMの対物レンズ配置を模式的に表している. (a)アウトレンズ型は汎用型のSEMに広く使われているが, レンズ磁界と磁路の位置関係から焦点距離 f が大きい. そこで前図11②に示すように磁界レンズ主面を試料に近づけるため, (b)セミインレンズ型と(c)インレンズ型対物レンズを開発した. アウトレンズ型は磁路のギャップが光軸に向いているのに対し, セミインレンズ型は磁路のギャップ

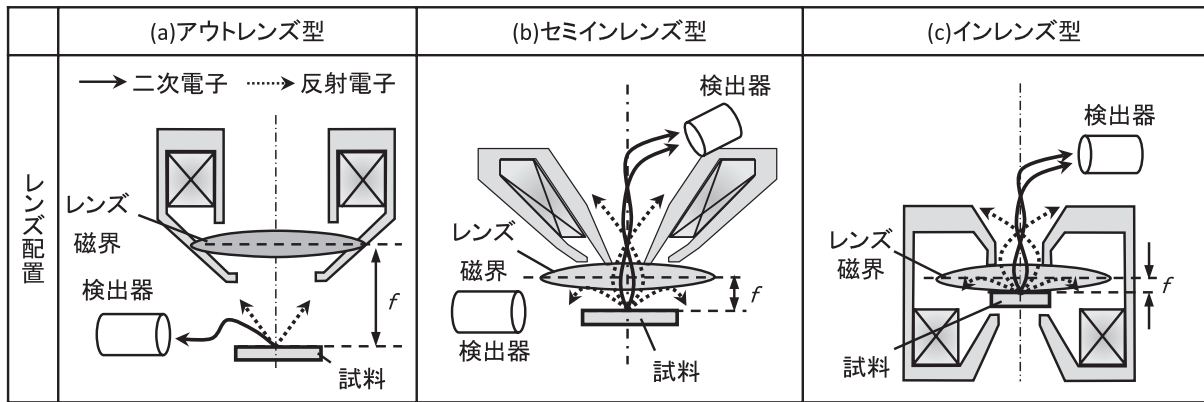


図 12 SEM 対物レンズの種類

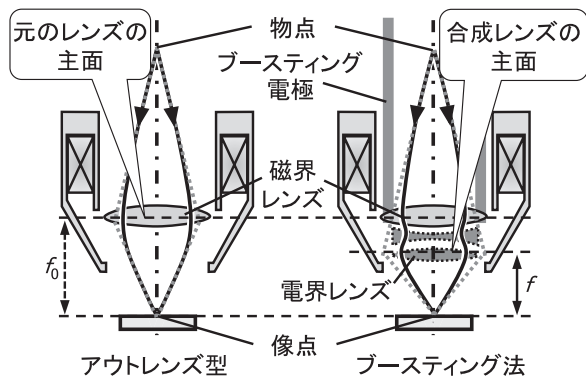


図 13 ブースティング法による短焦点化

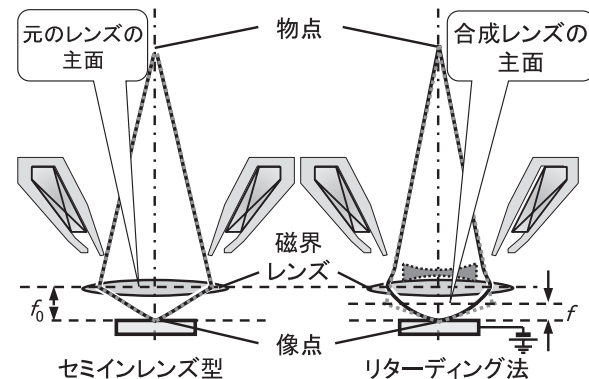


図 14 リターディング法による短焦点化

プを試料側に向けた。磁界レンズを磁路と試料の間に移動できたことで f が短くなった。インレンズ型は磁路のギャップ内に試料を挿入することで、 f を極限まで短くした超高分解能 SEM に活用されている。図中には、参考に二次電子、反射電子の軌道を追記した。対物レンズに合った検出器を開発したことで高画質の SEM 像が取得可能となった。

次に、図 11 ③に示す電界レンズを利用し合成レンズの主面を試料側に移動する具体策を 2 法紹介する。図 13 はブースティング法によるアウトレンズ型の短焦点化である。正電圧を印加したブースティング電極を光軸周りに配置し、電子ビームが磁界レンズを高エネルギーで通過後、電界レンズ(バイポテンシャルレンズ)で減速する。磁界レンズの凸レンズに続いて電界レンズの凹+凸レンズによって実線のように軌道が変化する。軌道の接線(破線)から合成レンズの主面が試料側に移動し、短焦点化していることが分かる。

続いて図 14 はリターディング法によるセミインレンズ型の短焦点化である。試料に負電圧を印加することで、電子ビー

ムが磁界レンズを高エネルギーで通過後、電界レンズ(リターディングレンズ)で減速する。リターディングレンズは凹レンズとして働き実線のように軌道が変化する。軌道の接線(破線)から合成レンズの主面が試料側に移動し、短焦点化していることが分かる。

(以下、後篇につづく)

文 献

- 1) Born, M. and Wolf, E.: Principles of Optics 7th ed., Cambridge University Press, Cambridge, 40 (2011)
- 2) Born, M. and Wolf, E.: Principles of Optics 7th ed., Cambridge University Press, Cambridge, 136-138 (2011)
- 3) Hawkes, P.W. and Kasper, E.: Principles of Electron Optics vol. 1, Academic Press, London, 35-45 (1989)
- 4) Jackson, J.D.: Classical Electrodynamics 3rd ed., John Wiley & Sons Ins., 34 (1999)
- 5) Sturrock, P.A.: Static and Dynamic Electron Optics, Cambridge University Press, Cambridge, 34-39 (1955)